Лузгин Владимир Васильевич
к. т. н., доцент
Братский государственный университет
Россия, Братск
e-mail: rasp@brstu.ru

Vladimir Luzgin
candidate of tech. sciences,
senior lecturer Bratsk State University
Russia, Bratsk
e-mail: rasp@brstu.ru

Панасов Вячеслав Владимирович
Братский государственный университет
Россия, Братск
e-mail: rasp@brstu.ru

Vyacheslav Panasov
Bratsk State University
Russia, Bratsk
e-mail: rasp@brstu.ru

УДК 517.977.58

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ОСНОВЕ МНОЖЕСТВ СИММЕТРИИ [1]

© П. Д. Лебедев, А. А. Успенский

Ключевые слова: минимаксное решение уравнения в частных производных первого порядка; задача Дирихле; задача быстродействия; множество симметрии; эйконал.

Аннотация: Приводится метод построения функции оптимального результата в задаче быстродействия, основанный на выделении множества симметрии краевого условия. Развивается численно-аналитический подход к аппроксимации множества управляемости. Устанавливается связь решения задачи быстродействия с решением задачи о построении эволюции волновых фронтов при конструировании эйконала. Приводятся результаты моделирования решений динамических задач быстродействия и задач геометрической оптики.

Изучается задача Дирихле для уравнения в частных производных первого порядка типа Гамильтона–Якоби

$$\min_{\nu:\|\nu\|\leqslant 1} \langle \nu, Du(\mathbf{x})\rangle + 1 = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|\nu\| = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$ — евклидова норма вектора $\nu = (\nu_1, \nu_2)$, Γ — граница замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^2$, $Du(\mathbf{x}) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ — градиет функции $u = u(\mathbf{x})$.

Минимаксное решение [1] задачи Дирихле (1)–(2) совпадает с функцией оптимального результата соответствующей задачи динамического быстродействия с круговой индикатрисой скоростей. Исследуется достаточно общий случай краевого (целевого) множества M. Предполагается, что M является, вообще говоря, невыпуклым множеством с негладкой границей. Предлагается

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований 08-01-00587-а, Программы государственной поддержки ведущих научных школ НШ-2640.2008.1 и федеральной программы Президиума РАН №29.

метод решения задачи, основанный на выделении биссектрисы краевого множества. Биссектриса относится к множествам симметрии [2]. Топологические особенности множеств симметрии изучались в [3]. С точки зрения теории дифференциальных игр [4–5] множества симметрии относятся в плоском случае к рассеивающим кривым.

Численно-аналитические подходы к конструированию множеств симметрии при изучении особенностей геометрии по существу невыпуклых множеств, при построении функции оптимального результата в задачах управления, а также при формировании эйконала в геометрической оптики, развивались в работах [6–10].

Приводятся результаты моделирования решений задач Дирихле, эволюции множеств управляемости, а также распространения волновых фронтов в среде с постоянным коэффициентом преломления.

Пример решения задачи быстродействия с круговой индикатрисой скоростей представлен на рис. 1. В качестве целевого множества M выбран подграфик функции

$$f(x) = \begin{cases} -7.5x^4 - 13x^3 - 4.5x^2, & x \leqslant 0, \\ -6x^4 + 5x^3 - 3x^2, & x > 0. \end{cases}$$

Здесь Γ обозначает границу множества M, L — множество симметрии, Φ — линии уровня функции оптимального результата $u = u(x, y)$ с шагом $h_\rho = 0.4$. На множестве симметрии функция $u = u(x, y)$ теряет гладкость, ее линии уровня соответственно имеют изломы.

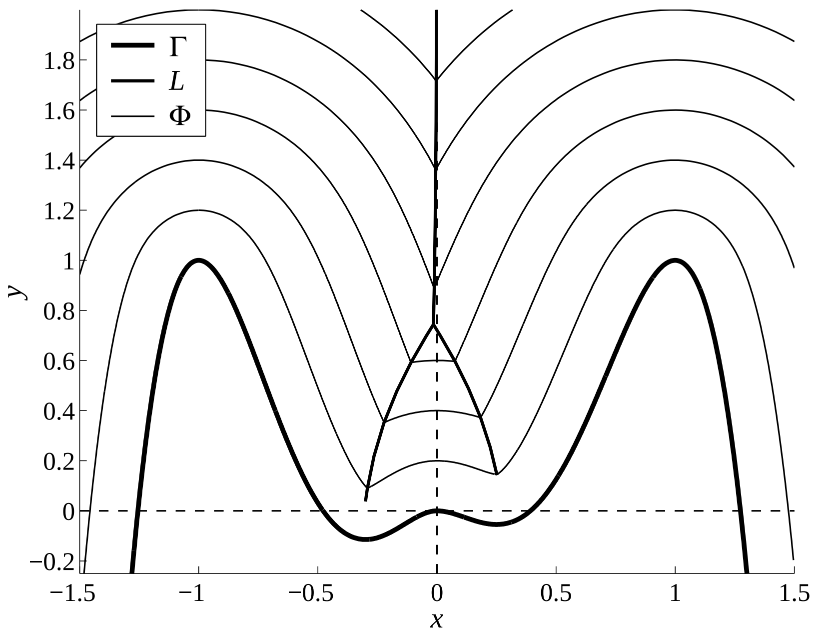

Рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003.

2. *Арнольд В.И.* Особенности каустик и волновых фронтов. М.: ФАЗИС, 1996.

3. *Sedykh V.D.* On the topology of symmetry sets of smooth submanifolds in Rk // Advanced Studies in Pure Mathematics, 2006. Vol. 43. Singularity Theory and Its Applications. Pp. 401–419

4. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967. 479 с.

5. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

6. *Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н.* α-множества и их свойства / Институт математики и механики УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.04, № 543-В2004.

7. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Аналитическое и численное конструирование функции оптимального результата для одного класса задач быстродействия // Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. № 27. С. 65–79.

8. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Геометрия и асимптотика волновых фронтов // Известия высших учебных заведений. 2008. № 3. С. 27–37.

9. *Ушаков В.Н., Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Построение минимаксного решения уравнения типа эйконала // Труды Института математики и механики. 2008. Т. 14. №2. С.182–191.

10. *Успенский А.А., Лебедев П.Д.* Процедуры вычисления меры невыпуклости плоского множества // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т. 49. № 3. С. 431–440.

Abstract: method for construction of the optimal result function for boarder performance problem based on symmetry sets is searched; controllability sets levels are approximated using analytical and computing approaches; connection between the boarder performance problem and evolution of the waterfronts in eikonal problem is ascertained; modeling results dynamic and geometry optic problems are given.

Keywords: Minimax Solution Of the First Order PDE; Dirichlet Problem; Performance Problem; Symmetry Set; Eikonal.

Лебедев Павел Дмитриевич
аспирант
Институт математики
и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: pleb@yandex.ru

Pavel Lebedev
post-graduate student
Institute of Mathematics and Mechanics of UrD RAS
Russia, Ekaterinburg
e-mail: pleb@yandex.ru

Успенский Александр
Александрович
к. ф.-м. н., с. н. с.
Институт математики и механики УрО РАН
Россия, Екатеринбург
e-mail: uspen@imm.uran.ru

Alexandr Uspenskiy
candidate of phys.-math. sciences, s. s. c.
Institute of Mathematics and Mechanics of UrD RAS
Russia, Ekaterinburg
e-mail: uspen@imm.uran.ru